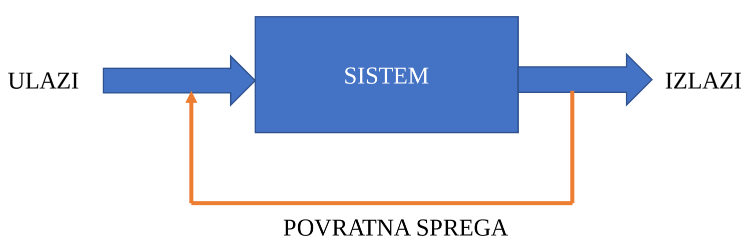
LOGIČKE FUNKCIJE

SISTEM je celina koja ima definisane ulaze i izlaze
i koja se ponaša po unapred zadatom algoritmu



DIGITALNI SISTEM je diskretan sistem
Menja stanja samo i diskretnim trenucima vremena
- Asinhrona promena
- Sinhrona promena

NEMA PROMENE U SISTEMU IZMEĐU TIH DISKRETNIH TRENUTAKA VREMENA

APSTRAKTAN SISTEM
ULAZI I IZLAZI SU APSTRAKTNE INFORMACIJE

REALAN SISTEM
ULAZI I IZLAZI SU REALNI SIGNALI

SIGNAL – SVAKA FIZIČKA VELIČINA KOJA NOSI NEKU INFORMACIJU

Apstraktan – postoji samo kao pojam, misaoni

APSTRAKTAN ⟷ REALAN

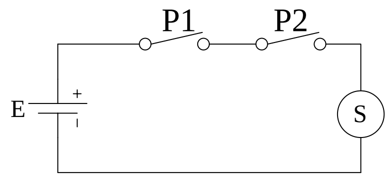
TREBA NAM ALAT ZA „LAKU“ ANALIZU I SINTEZU

BULOVA ALGEBRA
MATEMATIČKA LOGIKA
ALGEBRA PREKIDAČKIH FUNKCIJA
PREKIDAČKA ALGEBRA
…

George Boole 1854 - *The Laws of Thought*

Claude E. Shannon 1938 - *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*

PRIMER



TVRDNJA1 – PREKIDAČ P1 ZATVOREN
TVRDNJA2 – PREKIDAČ P2 ZATVOREN
TVRDNJA3 – SIJALICA S SVETLI

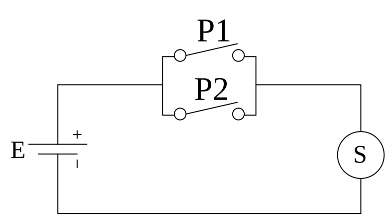
TVRDNJA TAČNA - $\top$
TVRDNJA NETAČNA - $\bot$

P1	P2	S
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$

$S = P1 \wedge P2$

P1 – promenljiva kojoj je pridruženo „stanje“ prekidača P1
P2 – promenljiva kojoj je pridruženo „stanje“ prekidača P2
S – promenljiva kojoj je pridruženo „stanje“ sijalice S

PRIMER



TVRDNJA1 – PREKIDAČ P1 ZATVOREN
TVRDNJA2 – PREKIDAČ P2 ZATVOREN
TVRDNJA3 – SIJALICA S SVETLI

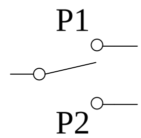
TVRDNJA TAČNA - $\top$
TVRDNJA NETAČNA - $\bot$

P1	P2	S
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$

$S = P1 \vee P2$

P1 – promenljiva kojoj je pridruženo „stanje“ prekidača P1
P2 – promenljiva kojoj je pridruženo „stanje“ prekidača P2
S – promenljiva kojoj je pridruženo „stanje“ sijalice S

PRIMER



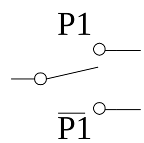
TVRDNJA1 – PREKIDAČ P1 ZATVOREN
TVRDNJA2 – PREKIDAČ P2 ZATVOREN

TVRDNJA TAČNA - $\top$
TVRDNJA NETAČNA - $\perp$

P1	P2
$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$

$P2 = \overline{P1}$

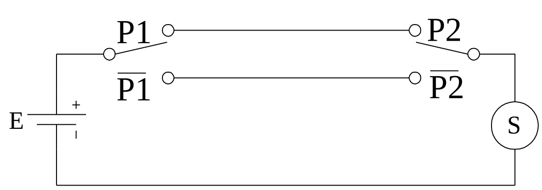
ZA P2 JE UVEK „SUPROTNA“ TVRDNJA OD P1



NE TREBAJU NAM DVE PROMENLJIVE
ZA OPIS STANJA OVOG PREKIDAČA

7

PRIMER



SIJALICA SVETLI
AKO SU I P1 I P2 UKLJUČENI
ILI
AKO SU I P1 I P2 ISKLJUČENI

8

REDNIM, PARALELNIM POVEZIVANJEM OVAKVIH PREKIDAČA MOGU DA SE RAZREŠE SVI „LOGIČKI“ PROBLEMI U REALIZACIJI REALNIH SISTEMA

1. LIFT JE NA 3. SPRATU
2. DOBIJEN JE POZIV SA DRUGOG SPRATA „ZA DOLE“
3. DOBIJEN JE POZIV SA ČETVRTOG SPRATA „ZA GORE“
4. LIFT TREBA POKRENUTI NA GORE
5. LIFT TREBA ZAUSTAVITI NA ČETVRTOM SPRATU
6. OTVORITI VRATA LIFTA

…

1. TVRDNJA LIFT JE NA 3. SPRATU – PROMENLJIVA A
2. TVRDNJA DOBIJEN JE POZIV SA DRUGOG SPRATA „ZA DOLE“ - PROMENLJIVA B

…

k. POKRETANJE LIFTA GORE – PROMENLJIVA Y

$Y = f(A, B, \dots)$ $\longrightarrow$ Šema sa prekidačima

Funkcija ili preslikavanje iz skupa A u skup B
je svako pravilo f
po kome se elementu $x \in A$ pridružuje jedinstveni element $y \in B$

$$f: A \rightarrow B$$

$$y = f(x)$$

A – neprazan skup
n – prirodan broj

$$f: A^n \rightarrow A$$

Operacija – sve funkcije koje preslikavaju n-ti stepen nekog skupa u sam skup

- Opis „rečima“
- Opis funkcionalnim tabelama
- Opis jednačinama
- Šematski prikaz korišćenjem simbola operacija - Električna šema

Umesto tačno netačno koristićemo
- logičku nulu „0“
- logičku jedinicu „1“

Pridruživanje

Pridružujemo promenljivu *P* stanju prekidača
- prekidač zatvoren – P = „1“
- prekidač nije zatvoren odnosno otvoren je – P = „0“

Promenljiva koja je pridružena prekidaču *P* može imati samo dva stanja ili stanje logičke jedinice ili stanje logičke nule.

$$A = \{0,1\}$$

$$P \in A$$

P – binarna promenjiva

UNARNE OPERACIJE

$A = \{0,1\}$ $f: A \to A$ $f: \{0,1\} \to \{0,1\}$

Funkcionalna tabela za sve moguće unarne operacije

$x \in A$ $y_k \in A$ $2^2 = 4$

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

y_0 i y_3 „nemaju smisla“

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Negacija, Inverzija, Logička „NE“ operacija (NOT)

Funkcionalna tabela

x	y
0	1
1	0

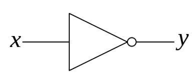
Jednačine

$y = \bar{x}$

$y = \neg x$

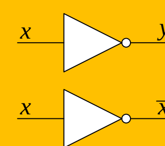
$y = \sim x$

Simbol za električne šeme



Invertor

digresija



13

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Bafer

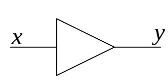
Funkcionalna tabela

x	y
0	0
1	1

Jednačine

$y = x$

Simbol za električne šeme



Bafer

14

BINARNE OPERACIJE

$A = \{0,1\} \quad f: A^2 \rightarrow A \qquad f: \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} \rightarrow \{0,1\}$

Funkcionalna tabela za sve moguće binarne operacije

$(x, y) \in A^2 \qquad z_k \in A \qquad 2^4 = 16$

x	*y*	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

z_0 i z_{15} „nemaju smisla“

15

x	*y*	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logička I operacija (AND)

Funkcionalna tabela

x	*y*	*z*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

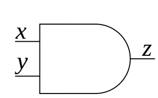
Jednačine

$z = x \cdot y$

$z = x \wedge y$

$z = x \& y$

Električne šeme



Logičko I kolo

digresija

DVOULAZNO

konjunkcija, logičko množenje

16

x	y	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logička ILI operacija (OR)

Funkcionalna tabela

x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

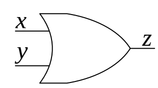
Jednačine

$z = x + y$

$z = x \vee y$

$z = x \mid y$

Električne šeme



Logičko ILI kolo

digresija

DVOULAZNO

disjunkcija, logičko sabiranje

17

x	y	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logička EKSILI operacija (EXOR)

Funkcionalna tabela

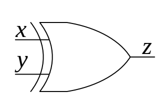
x	y	z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Jednačine

$z = x \oplus y$

$z = x \,\hat{}\, y$

Električne šeme



Logičko EKSILI kolo

digresija

DVOULAZNO

logičko eksluzivno sabiranje

18

x	y	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logičko NI kolo (NAND)

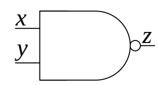
Funkcionalna tabela

x	y	z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

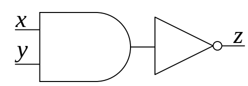
Jednačine

$$z = \overline{x \cdot y}$$

Električne šeme



Logičko NI kolo



19

x	y	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logičko NILI kolo (NOR)

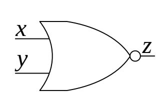
Funkcionalna tabela

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

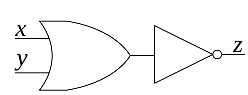
Jednačine

$$z = \overline{x + y}$$

Električne šeme



Logičko NILI kolo



20

x	y	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Logičko EKSNILI kolo (EXNOR)

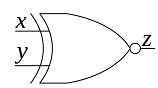
Funkcionalna tabela

x	y	z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

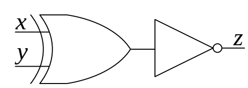
Jednačine

$$z = \overline{x \oplus y}$$

Električne šeme



Logičko EKSNILI kolo



DRUGI NAČIN DA SE UVEDE BULOVA ALGEBRA
AKSIOME + TEOREME

AKSIOME

1. Princip isključenja trećeg, kontradikcija

$$x = 0 \implies x \neq 1\,, \quad x = 1 \implies x \neq 0$$

2. Negacija

$$x = 0 \implies \bar{x} = 1\,, \quad x = 1 \implies \bar{x} = 0$$

	Konjunkcija	Disjunkcija
3.	$0 \cdot 0 = 0$	$1 + 1 = 1$
4.	$1 \cdot 1 = 1$	$0 + 0 = 0$
5.	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$

DRUGI NAČIN DA SE UVEDE BULOVA ALGEBRA
AKSIOME + TEOREME

TEOREME

	Konjunkcija	Disjunkcija
1. Neutralni element	$x \cdot 1 = x$	$x + 0 = x$
2. Nula element	$x \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$
3. Idempotencija	$x \cdot x = x$	$x + x = x$
4. Komutativnost	$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
5. Asocijativnost	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$

DRUGI NAČIN DA SE UVEDE BULOVA ALGEBRA
AKSIOME + TEOREME

TEOREME

6. Operacija negacije je involutivna

$$\overline{(\bar{x})} = x$$

7. Konjunkcija je distributivna prema disjunkciji i obrnuto

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

8. Konjunkcija je apsorbativna prema disjunkciji i obrnuto

$$x \cdot (x + z) = x$$
$$x + (x \cdot z) = x$$

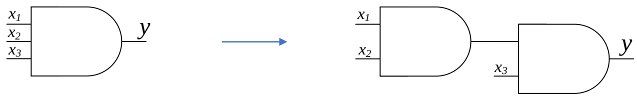
9. De Morganovi obrasci

$$\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

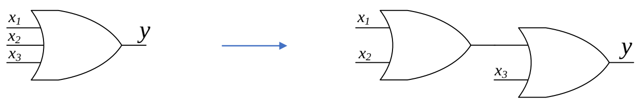
Višeulazna logička kola

Troulazno I kolo



$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

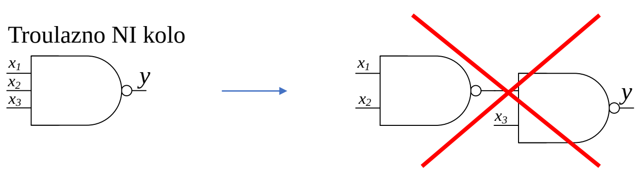
Troulazno ILI kolo



$$y = x_1 + x_2 + x_3 = (x_1 + x_2) + x_3$$

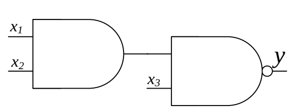
Višeulazna logička kola

Troulazno NI kolo



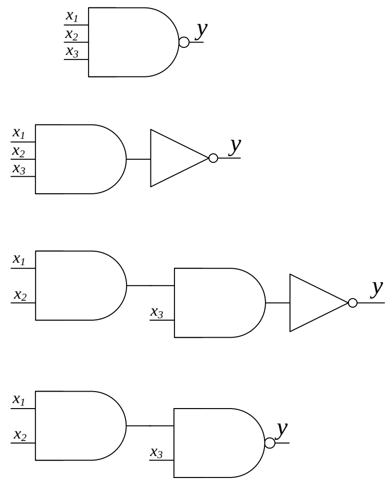
$$y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \neq \overline{\overline{(x_1 \cdot x_2)} \cdot x_3}$$

$$y = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \overline{(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3}$$



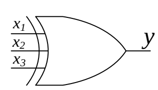
Višeulazna logička kola

Troulazno NI kolo



Višeulazna logička kola

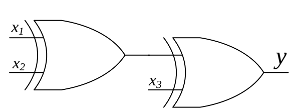
Troulazno EXILI kolo



Za dvoulazno $y = x_1 \oplus x_2 = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2$

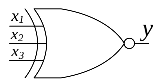
Za troulazno da li važi $y = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$

Ako važi jednačina onda važi i

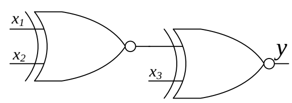


Višeulazna logička kola

Troulazno EXNILI kolo



Da li važi da je jednako sa



29

Aktivan logički nivo

Naviknuti da razmišljamo u „pozitivnoj“ logici

I logičko kolo – daće logičku jedinicu na izlazu ako su na svim ulazima logičke jedinice
i na prvom i na drugom i …

ILI logičko kolo – daće logičku jedinicu na izlazu ako je bar na jednom ulazu logička jedinice
ili na prvom ili na drugom ili …

Znači možemo da kažemo da logička kola I i ILI izvršavaju svoju logičku funkciju i kada su zadovoljeni logički uslovi na izlaz će biti logička jedinica

Znači možemo da kažemo da logička kola I i ILI izvršavaju svoju logičku funkciju i kada su zadovoljeni logički uslovi na izlaz će biti aktivan nivo logičke jedinica

30

Aktivan logički nivo

Naviknuti da razmišljamo u „pozitivnoj“ logici

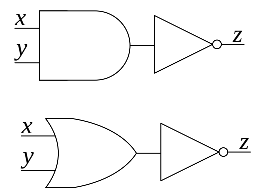
NI logičko kolo – daće logičku nulu na izlazu ako su na svim ulazima logičke jedinice i na prvom i na drugom i …

NILI logičko kolo – daće logičku nulu na izlazu ako je bar na jednom ulazu logička jedinice ili na prvom ili na drugom ili …

Znači možemo da kažemo da logička kola NI i NILI izvršavaju svoju logičku funkciju i kada su zadovoljeni logički uslovi na izlaz će biti logička nula

Znači možemo da kažemo da su logička kola NI i NILI ustvari I i ILI logička kola sa aktivnim nivoom logičke nule na izlazu

Onda je jasno zašto smo pogrešili kod višeulaznih NI i NILI logičkih kola



31

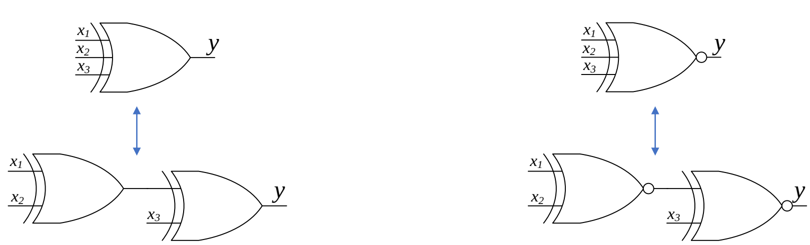
Aktivan logički nivo

Osobina višeulaznih EXILI i EXNILI kola

Analizirajući funkcionalne tabele ili jednačine:

Na izlazu će biti aktivan nivo ako je na ulazima neparan broj logičkih jedinica

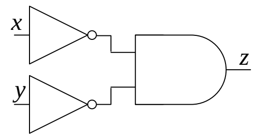
Možda je sada lakše odgovoriti na pitanje da li je isto



32

Aktivan logički nivo

Kao što smo razmišljali o izlazima možemo da razmišljamo i o ulazima

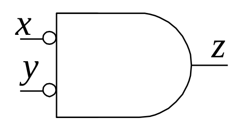


Funkcija koju kolo radi je $z = \bar{x} \cdot \bar{y}$

I funkcija: na izlazu logička jedinica kada su na oba ulaza logičke jedinice

Da bi signal $\bar{x}$ bio logička jedinica x mora biti logička kola

Gledajući kompletno kolo
na izlazu logička jedinica kada su na oba ulaza logičke nule

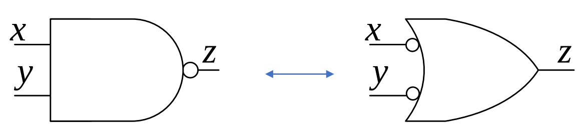


Logičko I kolo sa aktivnim nivoom logičke jedinice na izlazu i aktivnim nivoima logičke nule na ulazima

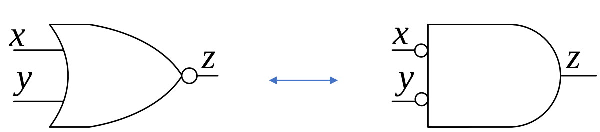
Dualna logička kola

De Morganovi obrasci + aktivan nivo

$\overline{(x \cdot y)} = \bar{x} + \bar{y}$

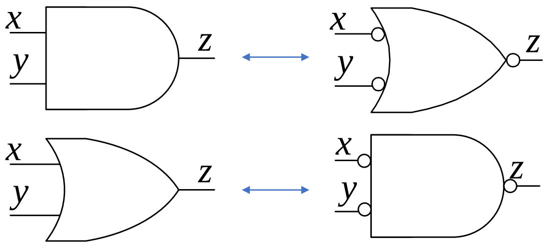


$\overline{(x + y)} = \bar{x} \cdot \bar{y}$



U složenim kolima da bi lakše sagledali „logičku obradu“ pojedinih signala prilikom crtanja šema možemo da koristimo dualna kola.
I logičku funkciju menjamo u ILI logičku funkciju i obrnuto
i menjamo aktivne nivoe na ulazima i izlazima

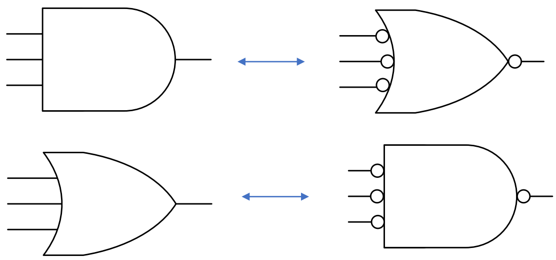
Dualna logička kola



$$(x \cdot y) = \overline{\overline{(x \cdot y)}} = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$$

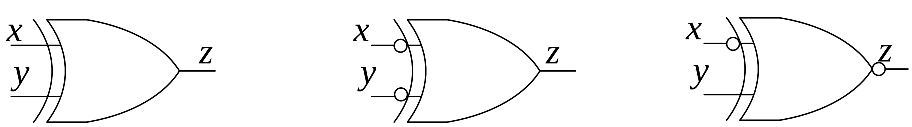
$$(x + y) = \overline{\overline{(x + y)}} = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$$

Dualnost važi i za višulazna kola

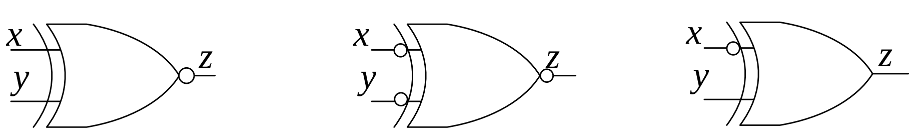


Dualna logička kola

Ispitajte dualnost

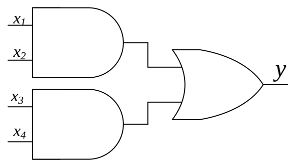


Ispitajte dualnost



Primer za dualnost prilikom crtanja i realizacije

Treba nam funkcija



Koristimo dva različita tipa kola, može da bude nezgodno a i skupo.
Tip: funkcija i broj ulaza.
Bolje bi bilo da samo jedan tip kola koristimo.